第 61 卷　第 4 期　　中山大学学报（自然科学版）（中英文）　　Vol. 61　No. 4
2022 年　7 月　　ACTA　SCIENTIARUM　NATURALIUM　UNIVERSITATIS　SUNYATSENI　　Jul.　2022

DOI：10. 13471/j. cnki. acta. snus. 2020A056

Hilbert K-模上酉半群的广义紧框架向量的诱导序列*

董芳芳，裴瑞昌

天水师范学院数学与统计学院，甘肃 天水 741001

摘　要：引入了Hilbert K-模上酉系统的换位，广义标准正交和诱导序列等概念，研究了广义框架变换和正交投影的关系，得到了关于广义紧框架向量的一个充要条件以及其对应的诱导序列的一个重要结论。

关键词：Hilbert K-模；酉系统；换位；广义紧框架向量；诱导序列

中图分类号：O177. 1　　**文献标志码：**A　　**文章编号：**2097－0137（2022）04－0183－06

The induction sequences of generalized tight frame vectors for unitary semi-group acting on Hilbert K-modules

DONG Fangfang, *PEI Ruichang*

College of Mathematical and Statistics, *Tianshui Normal University*, *Tianshui 741001*, *China*

Abstract：The concepts of transposition for unitary system，generalized orthonormal and induction sequence are introduced. And the relationship between generalized frame transform and orthogonal projection is studied. Finally，the necessary and sufficient conditions of generalized tight frames vectors and the important conclusion about their induction sequence are obtained.

Key words：Hilbert K-module；unitary system；transposition；generalized tight frame vector；induction sequence

Hilbert K-模是一种特殊的Hilbert C^*-模，其中底代数K为作用在Hilbert空间上的全体紧算子组成的C^*-代数，即$I \notin$ K，Bakic等[1]证明了有限或可数生成的Hilbert K-模一定有特殊的标准正交基，其特殊点在于相同基向量的内积为K中的一个秩1的自伴投影。

广义框架是满足一定条件的算子组成的集合，对于广义框架，Sun[2]和Yao[3]引入了Hilbert空间上的广义框架，研究了一系列性质，肖秀梅等[4]引入了Hilbert K-模上的广义框架，并研究了其稳定性等。本文针对Hilbert K-模上广义框架的诱导序列展开研究，得到了诱导序列的内积组成的无穷级数的收敛性这一结论，并将其置于酉半群上研究，一方面是想研究正交投影和酉半群的换位之间的关系，另一方面是定理3证明的需要，并且本文的指标集J和Λ均为有限或可数指标集。本文研究的模均为有限或可数生成的。

另外，由于$I \notin$ K，因此，Hilbert K-模不像Hilbert C^*-模(见文献[5])一样可以膨胀，所以，本文直接在Hilbert K-模自身上引入了广义框架变换。

定义 1[1]　设K为作用在Hilbert空间H上的全体紧算子组成的C^*-代数，M是复数域C上的线性空间，

*　**收稿日期：**2020－10－16　　**录用日期：**2020－12－17　　**网络首发日期：**2022－01－07
基金项目：国家自然科学基金(11661070)
作者简介：董芳芳(1981年生)，女；**研究方向：**泛函分析和算子代数；E-mail：dff8367848@126. com
通信作者：裴瑞昌（1975年生），男；**研究方向：**泛函分析；E-mail：prc211@163. com.

M是左K-模，满足$\mu(kx)=(\mu k)x=k(\mu x)$，$\mu\in C$，$k\in \mathrm{K}$，$x\in M$，若$\langle\cdot,\cdot\rangle$：$M\times M\to \mathrm{K}$具有性质：

（i）$\langle x,x\rangle\geqslant 0$，$x\in M$；

（ii）$\langle x,x\rangle=0\Leftrightarrow x=0$，$x\in M$；

（iii）$\langle x,y\rangle=\langle y,x\rangle^*$，$x,y\in M$；

（iv）$\langle kx,y\rangle=k\langle x,y\rangle$，$k\in\mathrm{K}$，$x,y\in M$；

（v）$\langle x+y,z\rangle=\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle$，$x,y,z\in M$，

则称$(M,\langle\cdot,\cdot\rangle)$为准Hilbert K-模，在$M$上定义范数$\|x\|:=\|\langle x,x\rangle\|^{1/2}$，若$M$在该$\|\cdot\|$意义下完备，就称之为Hilbert K-模。

定义2[1] 若存在$\xi\in H$，且$\|\xi\|=1$（H为Hilbert空间），使得对任意λ，$\mu\in\Lambda$，

$$\langle v_\lambda,v_\mu\rangle=\begin{cases}0, & 当\lambda\neq\mu时；\\ e_{\xi,\xi}, & 当\lambda=\mu时，\end{cases}$$

则称序列$\{v_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$为Hilbert K-模$M$的标准正交序列；若该标准正交序列完备，即$\overline{\mathrm{span}_{\mathrm{K}}}\,v_\lambda=M$，$\lambda\in\Lambda$，则称它为$M$的标准正交基。

定义3[6] 设M，N_j均为Hilbert K-模，A_j: $M\to N_j$为可伴有界线性算子，称$\{A_j|j\in J\}$为M关于N_j的广义框架，若存在$a>0$，$b>0$，使得对任意$x\in M$，有

$$a\langle x,x\rangle\leqslant\sum_{j\in J}\langle A_j(x),A_j(x)\rangle\leqslant b\langle x,x\rangle.$$

分别称a,b为其广义下，上框架界；特别地，若$a=b$，则称$\{A_j|j\in J\}$为M关于N_j的广义紧框架；若$a=b=1$，则称$\{A_j|j\in J\}$为M关于N_j的广义正规紧框架。

同时，由文献[6]引入广义框架的方法：设$\{A_j|j\in J\}$为M关于N_j的广义框架，则对任意$x\in M$，$A_j(x)=\sum_{\lambda\in\Lambda}\langle x,x_{j,\lambda}\rangle v_{j,\lambda}$，其中$\{x_{j,\lambda}|j\in J,\lambda\in\Lambda\}$为$M$的标准正交基，$\{v_{j,\lambda}|j\in J,\lambda\in\Lambda\}$为$N_j$的标准正交基，并且，对任意$g_j\in N_j$，$A_j^*(g_j)=\sum_{\lambda\in\Lambda}\langle g_j,v_{j,\lambda}\rangle x_{j,\lambda}$，显然，$A_j^*(v_{j,\lambda})=\sum_{\lambda\in\Lambda}\langle v_{j,\lambda},v_{j,\lambda}\rangle x_{j,\lambda}=e_{\xi,\xi}x_{j,\lambda}$，将$\{e_{\xi,\xi}x_{j,\lambda}\}$称为$\{A_j|j\in J\}$的诱导序列。

定义4 设M和N_j均为Hilbert K-模，$U=\{u\in L(M)|uu^*=u^*u=I\}$为作用在$M$上的酉系统，$\{A_j|j\in J\}$为$M$关于$N_j$的可伴算子集，称$\{A_j|j\in J\}$为$U$的广义完全(正规紧)框架向量，若$\{A_ju|j\in J,u\in U\}$为$M$关于$N_j$的广义(正规紧)框架。

定义5 设M和N_j均为Hilbert K-模，U为作用在M上的酉系统，$\{\Gamma_j|j\in J\}$为M关于N_j的可伴算子，称$\{\Gamma_j|j\in J\}$为U的广义完全游荡向量，若$\{\Gamma_ju|j\in J,u\in U\}$为$M$关于$N_j$的广义标准正交基，即若

（i） 对任意$x\in M$，$\sum_{j\in J,u\in U}\langle\Gamma_ju(x),\Gamma_ju(x)\rangle=\langle x,x\rangle$；

（ii） 对任意$g_m,g_n\in N_j$，$\langle(\Gamma_iu)^*(g_m),(\Gamma_jv)^*(g_n)\rangle=\begin{cases}\langle g_m,g_n\rangle, & u=v且i=j；\\ 0, & 其他.\end{cases}$

定义6 设M和N_j均为Hilbert K-模，U为作用在M上的酉系统，$\{A_j|j\in J\}$为U的广义框架向量，$\{\Gamma_j|j\in J\}$为U的广义完全游荡向量，定义算子Φ：$M\to M$，使得对任意$x\in M$，$\Phi(x)=\sum_{j\in J,u\in U}(\Gamma_ju)^*(A_ju)(x)$，则$\Phi$为可伴的线性算子，且$\Phi^*(x)=\sum_{j\in J,u\in U}(A_ju)^*(\Gamma_ju)(x)$，特别地，$\Phi^*(\Gamma_ju)^*=(A_ju)^*$，称$\Phi$为$\{A_ju|j\in J,u\in U\}$的广义框架变换，将$S=\Phi^*\Phi=\sum_{j\in J,u\in U}(A_ju)^*(A_ju)$称为$\{A_ju|j\in J,u\in U\}$

的广义框架算子。

1　广义框架变换与正交投影

定义 7[7]　设U为作用在Hilbert K-模M上的酉系统，称$U'=\{T\in L(M)\,|\,Tu=uT, u\in U\}$为$U$的换位。

定理 1　设M为Hilbert K-模，U为作用在M上的酉半群，$\{\Gamma_j|\, j\in J\}$为U的广义完全游荡向量，$\{A_j|\, j\in J\}$为U的广义完全紧框架向量，且广义紧框架界为$a>0$，Φ为$\{A_ju|\, j\in J, u\in U\}$的广义框架变换，$P: M\to\Phi(M)$为的正交投影，则$P(\Gamma_ju)^*=\frac{1}{a}\Phi(A_ju)^*$，$\Phi\Phi^*=aP$，且$P\in U'$.

证明　首先，由于$\{A_ju|\, j\in J, u\in U\}$为$M$关于$N_j$的广义紧框架，从而$\Phi^*\Phi=aI$. 由于$P: M\to\Phi(M)$为正交投影，从而$P(M)=\Phi(M)$，并且当$P$作用在$\Phi(M)$上时，即$P:\Phi(M)\to\Phi(M)$，$P=I$，亦即$P(\Phi(M))=\Phi(M)$. 于是对任意$x\in M$，$g_j\in N_j$，

$$\begin{aligned}\left\langle\Phi(x), P(\Gamma_ju)^*(g_j)\right\rangle &= \left\langle\Phi(x), Pu^*\Gamma_j^*(g_j)\right\rangle=\left\langle P^*\Phi(x), u^*\Gamma_j^*(g_j)\right\rangle=\left\langle P\Phi(x), u^*\Gamma_j^*(g_j)\right\rangle\\ &= \left\langle\Phi(x), (\Gamma_ju)^*(g_j)\right\rangle=\left\langle x, \Phi^*(\Gamma_ju)^*(g_j)\right\rangle=\left\langle x, (A_ju)^*(g_j)\right\rangle=\left\langle x, \frac{1}{a}\Phi^*\Phi(A_ju)^*(g_j)\right\rangle\\ &= \frac{1}{a}\left\langle\Phi(x), \Phi(A_ju)^*(g_j)\right\rangle=\left\langle\Phi(x), \frac{1}{a}\Phi(A_ju)^*(g_j)\right\rangle.\end{aligned}$$

再由g_j的任意性知

$$P(\Gamma_ju)^*=\frac{1}{a}\Phi(A_ju)^*\text{或}\Phi(A_ju)^*=aP(\Gamma_ju)^*.$$

其次，由于$\{\Gamma_ju|\, j\in J, u\in U\}$为$M$关于$N_j$的广义标准正交基，从而对任意$x\in M$，有$x=\sum_{j\in J, u\in U}(\Gamma_ju)^*(\Gamma_ju)(x)$. 因此，

$$\begin{aligned}\Phi\Phi^*(x) &= \Phi\Phi^*\left(\sum_{j\in J, u\in U}(\Gamma_ju)^*(\Gamma_ju)(x)\right)=\Phi\left(\sum_{j\in J, u\in U}\Phi^*(\Gamma_ju)^*(\Gamma_ju)(x)\right)=\Phi\left(\sum_{j\in J, u\in U}(A_ju)^*(\Gamma_ju)(x)\right)\\ &= \sum_{j\in J, u\in U}\Phi(A_ju)^*(\Gamma_ju)(x)=\sum_{j\in J, u\in U}aP(\Gamma_ju)^*(\Gamma_ju)(x)=aP\left(\sum_{j\in J, u\in U}(\Gamma_ju)^*(\Gamma_ju)(x)\right)=aP(x).\end{aligned}$$

由x的任意性知$\Phi\Phi^*=aP$.

最后，由于对任意$x\in M$，$\Phi(x)=\sum_{j\in J, u\in U}(\Gamma_ju)^*(A_ju)(x)$，$\Phi^*(x)=\sum_{j\in J, u\in U}(A_ju)^*(\Gamma_ju)(x)$，而$U$为酉半群，从而对任意$u, v\in U$，$uv\in U$. 于是，

$$\begin{aligned}\Phi(v(x)) &= \sum_{j\in J, u\in U}(\Gamma_ju)^*(A_ju)(v(x))=\sum_{j\in J, u\in U}(\Gamma_ju)^*(A_juv)(x)=\sum_{j\in J, u\in U}(\Gamma_juvv^*)^*(A_juv)(x)\\ &= \sum_{j\in J, u\in U}v(\Gamma_juv)^*(A_juv)(x)=v\sum_{j\in J, u\in U}(\Gamma_juv)^*(A_juv)(x)=v\Phi(x).\end{aligned}$$

由x的任意性知$\Phi v=v\Phi$，即$\Phi\in U'$.

同理，由于

$$\begin{aligned}\Phi^*(v(x)) &= \sum_{j\in J, u\in U}(A_ju)^*(\Gamma_ju)(v(x))=\sum_{j\in J, u\in U}(A_ju)^*(\Gamma_juv)(x)=\sum_{j\in J, u\in U}(A_juvv^*)^*(\Gamma_juv)(x)\\ &= \sum_{j\in J, u\in U}v(A_juv)^*(\Gamma_juv)(x)=v\sum_{j\in J, u\in U}(A_juv)^*(\Gamma_juv)(x)=v\Phi^*(x),\end{aligned}$$

从而由x的任意性知$\Phi^*v=v\Phi^*$，即$\Phi^*\in U'$.

综上，$\Phi\in U'$，$\Phi^*\in U'$，从而$\Phi\Phi^*\in U'$，即$\frac{1}{a}\Phi\Phi^*\in U'$，亦即$P\in U'$.

2　广义框架向量的诱导序列的内积级数的收敛性

定义 8　设M为Hilbert K-模，对任意$x, y, z, w\in M$，定义直和的内积为$\langle x\oplus y, z\oplus w\rangle=\langle x, z\rangle+\langle y, w\rangle$.

定义 9　设M和N_j均为Hilbert K-模，U为作用在M上的酉系统，$\{A_j: M\to N_j|\, j\in J\}$和

$\left\{B_j: M \to N_j \middle| j \in J\right\}$均为$U$的广义紧框架向量，若对任意$g_m, g_n \in N_j$，

$$\left\langle (A_i u \oplus B_i u)^*(g_m), (A_j v \oplus B_j v)^*(g_n) \right\rangle = \begin{cases} \left\langle g_m, g_n \right\rangle, & i = j,\ u = v\ ; \\ 0\ , & \text{其他}, \end{cases}$$

则称$\left\{(A_j u \oplus B_j u)^* \middle| j \in J, u \in U\right\}$为$N_j$关于$M \oplus M \coloneqq M^{(2)}$的广义标准正交的算子直和序列（简称广义标准正交），也称$\left\{(A_j \oplus B_j)^* \middle| j \in J\right\}$为$U$的广义标准正交的算子直和向量。

定理2　设M和N_j均为Hilbert K-模，$\left\{A_j \middle| j \in J\right\}$和$\left\{B_j \middle| j \in J\right\}$均为$U$的广义紧框架向量，广义紧框架界分别为$a, b > 0$，$\Phi_1$：$M \to M$，$\Phi_2$：$M \to M$分别为其广义框架变换，$P$:$M \to \Phi_1(M)$和$Q$：$M \to \Phi_2(M)$均为正交投影，则$\left\{(A_j u \oplus B_j u)^* \middle| j \in J, u \in U\right\}$为广义标准正交的当且仅当$aP + bQ = I$.

证明　设$\left\{\Gamma_j: M \to N_j \middle| j \in J\right\}$为$U$的广义完全游荡向量，由于$\Phi_1^*(\Gamma_i u)^* = (A_i u)^*$，$\Phi_2^*(\Gamma_i u)^* = (B_i u)^*$，$\Phi_1 \Phi_1^* = aP$，$\Phi_2 \Phi_2^* = bQ$，从而对任意$g_m, g_n \in N_j$，

$$\begin{aligned} (A_i u \oplus B_i u)^*(g_m), (A_j v \oplus B_j v)^*(g_n) &= \left\langle (A_i u)^* \oplus (B_i u)^*(g_m), (A_j v)^* \oplus (B_j v)^*(g_n) \right\rangle \\ &= \left\langle (A_i u)^*(g_m), (A_j v)^*(g_n) \right\rangle + \left\langle (B_i u)^*(g_m), (B_j v)^*(g_n) \right\rangle \\ &= \left\langle \Phi_1^*(\Gamma_i u)^*(g_m), \Phi_1^*(\Gamma_j v)^*(g_n) \right\rangle + \left\langle \Phi_2^*(\Gamma_i u)^*(g_m), \Phi_2^*(\Gamma_j v)^*(g_n) \right\rangle \\ &= \left\langle \Phi_1 \Phi_1^*(\Gamma_i u)^*(g_m), (\Gamma_j v)^*(g_n) \right\rangle + \left\langle \Phi_2 \Phi_2^*(\Gamma_i u)^*(g_m), (\Gamma_j v)^*(g_n) \right\rangle \\ &= \left\langle (\Phi_1 \Phi_1^* + \Phi_2 \Phi_2^*)(\Gamma_i u)^*(g_m), (\Gamma_j v)^*(g_n) \right\rangle \\ &= \left\langle (aP + bQ)(\Gamma_i u)^*(g_m), (\Gamma_j v)^*(g_n) \right\rangle. \end{aligned}$$

因此，$\left\{(A_j u \oplus B_j u)^* \middle| j \in J, u \in U\right\}$为广义标准正交的当且仅当

$$\begin{aligned} \left\langle (aP + bQ)(\Gamma_i u)^*(g_m), (\Gamma_j v)^*(g_n) \right\rangle = \left\langle (A_i u \oplus B_i u)^*(g_m), (A_j v \oplus B_j v)^*(g_n) \right\rangle &= \begin{cases} \left\langle g_m, g_n \right\rangle, & i = j,\ u = v\ ; \\ 0\ , & \text{其他}, \end{cases} \\ &= \left\langle (\Gamma_i u)^*(g_m), (\Gamma_j v)^*(g_n) \right\rangle, \end{aligned}$$

即$\left\langle (aP + bQ)(\Gamma_i u)^*(g_m), (\Gamma_j v)^*(g_n) \right\rangle = \left\langle (\Gamma_i u)^*(g_m), (\Gamma_j v)^*(g_n) \right\rangle$当且仅当$aP + bQ = I$.

推论1　设M为Hilbert K-模，U为作用在M上的酉系统，$\left\{A_{ij} \middle| j \in J\right\}(i = 1, 2, \cdots, n)$均为$U$的广义紧框架向量，紧框架界分别为$a_i > 0$，$\Phi_i$分别为$\left\{A_{ij} u \middle| j \in J, u \in U\right\}$的广义框架变换，$P_i$：$M \to \Phi_i(M_i)$为正交投影，则$\left\{(A_{1j} u \oplus A_{2j} u \oplus \cdots \oplus A_{nj} u)^* \middle| j \in J, u \in U\right\}$为$N_j$关于$M \oplus M \oplus \cdots \oplus M \coloneqq M^{(n)}$的广义标准正交的算子直和序列当且仅当$\sum_{i=1}^{n} a_i P_i = I$.

定理3　设M和N_j均为Hilbert K-模，U为作用在M上的酉半群，若存在U的广义紧框架向量$\left\{A_{ij} \middle| j \in J\right\}(i = 1, 2, \cdots, n)$，使得$\left\{(A_{1j} u \oplus A_{2j} u \oplus \cdots \oplus A_{nj} u)^* \middle| j \in J, u \in U\right\}$为广义标准正交的，则$\sum_{i=1}^{n} \left\langle e_{\xi,\xi} x_{ij,\lambda}, e_{\xi,\xi} x_{ij,\lambda} \right\rangle = e_{\xi,\xi}$，其中$\left\{e_{\xi,\xi} x_{ij,\lambda} \middle| j \in J, \lambda \in \Lambda\right\}$为$\left\{A_{ij} u \middle| j \in J, u \in U\right\}$的诱导序列。

证明　设$\left\{\Gamma_j: M \to N_j \middle| j \in J\right\}$为$U$的广义完全游荡向量，$\left\{v_{j,\lambda} \middle| j \in J, \lambda \in \Lambda\right\}$为$N_j$的标准正交基，$a_i > 0$，$\Phi_i$，$P_i$同推论1，并且由该推论知$\sum_{i=1}^{n} a_i P_i = I$，因此，对任意$u \in U$，$j \in J$，$\lambda \in \Lambda$，

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \left\langle a_i P_i \Gamma_j^*(v_{j,\lambda}), \Gamma_j^*(v_{j,\lambda}) \right\rangle &= \left\langle (\sum_{i=1}^{n} a_i P_i) \Gamma_j^*(v_{j,\lambda}), \Gamma_j^*(v_{j,\lambda}) \right\rangle = \left\langle I \Gamma_j^*(v_{j,\lambda}), \Gamma_j^*(v_{j,\lambda}) \right\rangle \\ &= \left\langle u^* \Gamma_j^*(v_{j,\lambda}), u^* \Gamma_j^*(v_{j,\lambda}) \right\rangle = \left\langle (\Gamma_j u)^*(v_{j,\lambda}), (\Gamma_j u)^*(v_{j,\lambda}) \right\rangle = \left\langle v_{j,\lambda}, v_{j,\lambda} \right\rangle = e_{\xi,\xi}, \end{aligned}$$

即$\sum_{i=1}^{n} \left\langle P_i \Gamma_j^*(v_{j,\lambda}), \Gamma_j^*(v_{j,\lambda}) \right\rangle = e_{\xi,\xi}$.

另外，若 $u \in U$，则 $u^* \in U$. 从而，由 $P_i(\Gamma_j u)^* = \frac{1}{a_i}\Phi_i(A_{ij}u)^*$，$P^2 = P = P^*$，$P_i \in U'$，$\Phi_i^*\Phi_i = a_i I$ 以及 $(A_{ij}u)^*(v_{j,\lambda}) = e_{\xi,\xi}x_{ij,\lambda}$，得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\left\langle a_i P_i \Gamma_j^*(v_{j,\lambda}), \Gamma_j^*(v_{j,\lambda})\right\rangle &= \sum_{i=1}^{n} a_i\left\langle P_i\Gamma_j^*(v_{j,\lambda}), P_i\Gamma_j^*(v_{j,\lambda})\right\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i\left\langle u^* P_i\Gamma_j^*(v_{j,\lambda}), u^* P_i\Gamma_j^*(v_{j,\lambda})\right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i\left\langle P_i u^*\Gamma_j^*(v_{j,\lambda}), P_i u^*\Gamma_j^*(v_{j,\lambda})\right\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i\left\langle P_i(\Gamma_j u)^*(v_{j,\lambda}), P_i(\Gamma_j u)^*(v_{j,\lambda})\right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i\left\langle \frac{1}{a_i}\Phi_i(A_{ij}u)^*(v_{j,\lambda}), \frac{1}{a_i}\Phi_i(A_{ij}u)^*(v_{j,\lambda})\right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i\frac{1}{a_i^2}\left\langle \Phi_i(A_{ij}u)^*(v_{j,\lambda}), \Phi_i(A_{ij}u)^*(v_{j,\lambda})\right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\left\langle \Phi_i^*\Phi_i(A_{ij}u)^*(v_{j,\lambda}), (A_{ij}u)^*(v_{j,\lambda})\right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\left\langle a_i I(A_{ij}u)^*(v_{j,\lambda}), (A_{ij}u)^*(v_{j,\lambda})\right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}a_i\left\langle (A_{ij}u)^*(v_{j,\lambda}), (A_{ij}u)^*(v_{j,\lambda})\right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left\langle (A_{ij}u)^*(v_{j,\lambda}), (A_{ij}u)^*(v_{j,\lambda})\right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\left\langle e_{\xi,\xi}x_{ij,\lambda}, e_{\xi,\xi}x_{ij,\lambda}\right\rangle .\end{aligned}$$

综上有 $\sum_{i=1}^{n}\left\langle e_{\xi,\xi}x_{ij,\lambda}, e_{\xi,\xi}x_{ij,\lambda}\right\rangle = e_{\xi,\xi}$.

由于 $0 < \left\langle e_{\xi,\xi}x_{ij,\lambda}, e_{\xi,\xi}x_{ij,\lambda}\right\rangle \in$ K，而 K 为紧算子组成的 C^*-代数，从而 $I \notin$ K，因此，$0 < \left\langle e_{\xi,\xi}x_{ij,\lambda}, e_{\xi,\xi}x_{ij,\lambda}\right\rangle < I$. 事实上，当 $n \to +\infty$ 时，存在 U 的无穷项满足该条件的广义紧框架向量，使得其诱导序列的内积组成的“正项的无穷级数”收敛于 $e_{\xi,\xi}$，即 $\sum_{i=1}^{+\infty}\left\langle e_{\xi,\xi}x_{ij,\lambda}, e_{\xi,\xi}x_{ij,\lambda}\right\rangle = e_{\xi,\xi}$.

定理 4　设 M 和 N_j 均为 Hilbert K-模，U 为作用在 M 上的酉系统，若存在 U 的广义紧框架向量 $\left\{A_{ij}\middle| j \in J\right\}$ $(i = \mathbf{N}^+)$，使得 $\left\{(A_{1j}u \oplus A_{2j}u \oplus \cdots \oplus A_{nj}u \oplus \cdots)^*\middle| j \in J, u \in U\right\}$ 为广义标准正交的，则 $\sum_{i=1}^{+\infty}\left\langle e_{\xi,\xi}x_{ij,\lambda}, e_{\xi,\xi}x_{ij,\lambda}\right\rangle = e_{\xi,\xi}$，其中 $\left\{e_{\xi,\xi}x_{ij,\lambda}\middle| j \in J, \lambda \in \Lambda\right\}$ 为 $\left\{A_{ij}u\middle| j \in J, u \in U\right\}$ 的诱导序列。

例 1　设 $\left\{\Gamma_j\middle| j \in J\right\}$ 为 U 的广义完全游荡向量，$\left\{v_{j,\lambda}\middle| j \in J, \lambda \in \Lambda\right\}$ 为 N_j 的标准正交基。取 $A_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2^i}}\Gamma_j$，则

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{+\infty}\left\langle e_{\xi,\xi}x_{ij,\lambda}, e_{\xi,\xi}x_{ij,\lambda}\right\rangle &= \sum_{i=1}^{+\infty}\left\langle (A_j u)^*(v_{j,\lambda}), (A_j u)^*(v_{j,\lambda})\right\rangle = \sum_{i=1}^{+\infty}\left\langle \left(\frac{1}{\sqrt{2^i}}\Gamma_j u\right)^*(v_{j,\lambda}), \left(\frac{1}{\sqrt{2^i}}\Gamma_j u\right)^*(v_{j,\lambda})\right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{2^i}\left\langle (\Gamma_j u)^*(v_{j,\lambda}), (\Gamma_j u)^*(v_{j,\lambda})\right\rangle = \sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{2^i}\left\langle v_{j,\lambda}, v_{j,\lambda}\right\rangle = \sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{2^i}e_{\xi,\xi} \\ &= e_{\xi,\xi}\lim_{n\to+\infty} S_n = e_{\xi,\xi}\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}} = e_{\xi,\xi},\end{aligned}$$

并且 $\left\{A_{ij}u\middle| i \in \mathbf{N}^+, j \in J, u \in U\right\}$ 为以 $a_i = \frac{1}{2^i}$ 为广义紧框架界的广义紧框架，即 $\left\{A_{ij}\middle| i \in \mathbf{N}^+, j \in J\right\}$ 为 U 的广义紧框架向量。事实上，

$$\sum_{j \in J, u \in U}(A_{ij}u)^*(A_{ij}u) = \left(\frac{1}{\sqrt{2^i}}\Gamma_j u\right)^*\left(\frac{1}{\sqrt{2^i}}\Gamma_j u\right) = \frac{1}{2^i}\sum_{j \in J, u \in U}(\Gamma_j u)^*(\Gamma_j u) = \frac{1}{2^i}I.$$

另外，对任意 $g_l, g_m \in N_j$，

$$
\begin{aligned}
&\left\langle (A_{1j}u\oplus A_{2j}u\oplus\cdots\oplus A_{nj}u\oplus\cdots)^*(g_l),\ (A_{1k}v\oplus A_{2k}v\oplus\cdots\oplus A_{nk}v\oplus\cdots)^*(g_m)\right\rangle\\
&=\left\langle (A_{1j}u)^*(g_l),(A_{1k}v)^*(g_m)\right\rangle+\left\langle (A_{2j}u)^*(g_l),(A_{2k}v)^*(g_m)\right\rangle+\cdots+\left\langle (A_{nj}u)^*(g_l),(A_{nk}v)^*(g_m)\right\rangle+\cdots\\
&=\left\langle\left(\frac{1}{\sqrt{2^1}}\Gamma_j u\right)^*(g_l),\left(\frac{1}{\sqrt{2^1}}\Gamma_k v\right)^*(g_m)\right\rangle+\left\langle\left(\frac{1}{\sqrt{2^2}}\Gamma_j u\right)^*(g_l),\left(\frac{1}{\sqrt{2^2}}\Gamma_k v\right)^*(g_m)\right\rangle+\cdots\\
&\quad+\left\langle\left(\frac{1}{\sqrt{2^n}}\Gamma_j u\right)^*(g_l),\left(\frac{1}{\sqrt{2^n}}\Gamma_k v\right)^*(g_m)\right\rangle+\cdots\\
&=\frac{1}{2}\left\langle(\Gamma_j u)^*(g_l),(\Gamma_k v)^*(g_m)\right\rangle+\frac{1}{2^2}\left\langle(\Gamma_j u)^*(g_l),(\Gamma_k v)^*(g_m)\right\rangle+\cdots+\frac{1}{2^n}\left\langle(\Gamma_j u)^*(g_l),(\Gamma_k v)^*(g_m)\right\rangle+\cdots\\
&=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots\right)\left\langle(\Gamma_j u)^*(g_l),(\Gamma_k v)^*(g_m)\right\rangle\\
&=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}}\left\langle(\Gamma_j u)^*(g_l),(\Gamma_k v)^*(g_m)\right\rangle=\left\langle(\Gamma_j u)^*(g_l),(\Gamma_k v)^*(g_m)\right\rangle=\begin{cases}\left\langle g_l,g_m\right\rangle, & j=k\text{且}u=v\text{时；}\\ 0, & \text{其他，}\end{cases}
\end{aligned}
$$

即$\left\{(A_{1j}u\oplus A_{2j}u\oplus\cdots\oplus A_{nj}u\oplus\cdots)^*\,\middle|\, j\in J,u\in U\right\}$为广义标准正交的。

此外，由$A_{ij}=\frac{1}{\sqrt{2^i}}\Gamma_j$，有

$$\Phi_i=\sum_{j\in J,u\in U}(\Gamma_j u)^*(A_{ij}u)=\sum_{j\in J,u\in U}(\Gamma_j u)^*\left(\frac{1}{\sqrt{2^i}}\Gamma_j u\right)=\frac{1}{\sqrt{2^i}}\sum_{j\in J,u\in U}(\Gamma_j u)^*(\Gamma_j u)=\frac{1}{\sqrt{2^i}}I.$$

同理，

$$\Phi_i^*=\sum_{j\in J,u\in U}(A_{ij}u)^*(\Gamma_j u)=\sum_{j\in J,u\in U}\left(\frac{1}{\sqrt{2^i}}\Gamma_j u\right)^*(\Gamma_j u)=\frac{1}{\sqrt{2^i}}\sum_{j\in J,u\in U}(\Gamma_j u)^*(\Gamma_j u)=\frac{1}{\sqrt{2^i}}I.$$

从而$\Phi^*\Phi=\Phi\Phi^*=\frac{1}{\sqrt{2^i}}I\frac{1}{\sqrt{2^i}}I=\frac{1}{2^i}I$，即$a_i=\frac{1}{2^i}$. 因此，由$\Phi_i\Phi_i^*=a_iP_i$得$P_i=\frac{1}{a_i}\Phi_i\Phi_i^*=2^i\frac{1}{2^i}I=I$. 显然，$P^2=P=P^*=I$，并且

$$\sum_{i=1}^{+\infty}a_iP_i=\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{2^i}I=(\lim_{n\to+\infty}S_n)I=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}}I=I.$$

证毕

参考文献：

[1] BAKIC D, GULJAŠ B. Hilbert C*-modules over C*-algebras of compact operators [J]. Acta Sci Math (Szeged), 2002, 68 (1/2): 249-269.
[2] SUN W C. *G*-frames and *g*-Riesz bases [J]. Math Anal Appl, 2006, 322(1): 437-452.
[3] YAO X Y. Perturbations of *g*-frames in Hilbert spaces [J]. Journal of Mathematical Research and Exposition, 2008, 28 (4): 1037-1041.
[4] 肖秀梅，孟彬，靳世华. Hilbert K-模上的*g*-框架的稳定性[J]. 南京大学学报（数学半年刊），2010，27(1)：105-115.
[5] FRANK M, LARSON D R. Frames in Hilbert C*-modules and C*-algebras [J]. Operator Theory, 2002, 48: 203-233.
[6] 董芳芳. Hilbert K-模上广义框架的不相交性[J]. 中山大学学报（自然科学版），2014，53(2)：148-152.
[7] 董芳芳. Hilbert K-模上酉群的框架表示[J]. 数学进展，2008，37(3)：374-380.

（责任编辑　冯兆永）